

1

Devoir maison: Langages et Logique.

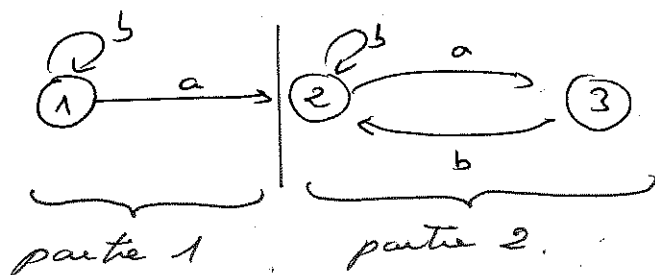
I- Automate \bar{c} partie et automate de Büchi.

1.1 Exemple.

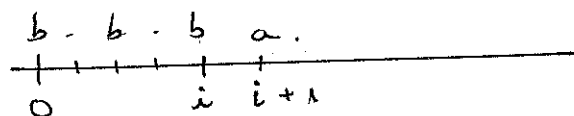
1) Le langage reconnu par \bar{c} est le langage défini sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ tel que on ait au moins une occurrence de a et ensuite b se répète infiniment souvent.

La formule LTL:

On divise l'automate en 2 pour avoir la formule LTL:



partie 1: On peut avoir une succession de b puis une occurrence de a . Soit i le nombre d'occurrences de

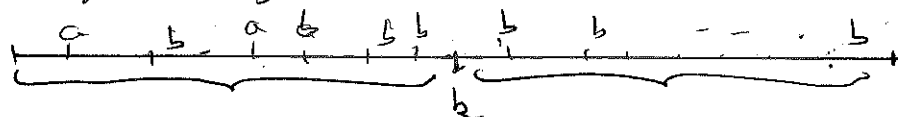


donc il existe $k \in \mathbb{N}$ $k \geq i$ tel que.

$$w, k \models a. \text{ et } w, j \models b \quad \forall i \leq j \leq k.$$

donc on a: $w, i \models b \cup a.$

partie 2: Pour la deuxième partie, on peut avoir une alternance (pas forcément régulière de a et de b) puis b se répète infiniment souvent.



On a donc: pour l'alternance de a et de b .

$a \wedge b$ puis au k -ième position b se
répète infiniment souvent: $GF(b)$.

Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ $k \geq i$ tel que

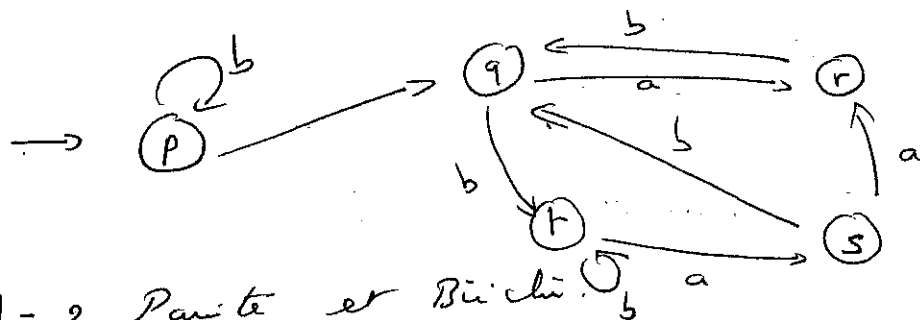
et $w_{ij} = a \wedge b$.
pour $i \leq j \leq k$.
 $w_k = GF(b)$

$w_i = a \wedge b \cup (GF(b))$.

On joint donc les 2 parties: On obtient:

$w_i = (b \cup a) \times ((a \wedge b) \cup (GF(b)))$

2) Soit l'automate de Büchi; avec $F = \{r\}$.



1-2 Partie et Büchi.

(a). On veut montrer que on peut transformer chaque automate de Büchi en automate $\tilde{\omega}$ partie équivalent, en préservant l'ensemble des états ainsi que la relation de transition.

On doit vérifier que pour chaque mot w accepté par l'automate de Büchi, w doit être accepté par l'automate $\tilde{\omega}$ partie.

On crée la fonction de coloriage χ en fonction de la cardinalité de Q : $|Q|$.

$\chi: Q \longrightarrow \{1, \dots, |Q|\}$.

(2). Pour chaque état de l'automate de Büchi, on y associe une couleur avec comme condition que pour les états terminaux, ils aient comme couleur le nombre pairs maximum. et en fonction de cette condition, on colore les autres états non terminaux. Ayant $|Q|$ états et $|Q|$ couleurs la fonction χ est bijective.

On montre que avec cette fonction de coloration tout mot accepté par l'automate de Büchi est accepté par l'automate à partie associée.

Ayant construite les transitions ainsi que les états, l'exécution sur l'automate à partie ne diffère pas de l'exécution de l'automate de Büchi. On doit vérifier que les conditions d'acceptation correspondent.

Avec un automate de Büchi, un mot est accepté lorsque $\bar{\alpha}$ une exécution p on a $\text{Inf}(p) \cap F \neq \emptyset$.

Or tous les éléments de F ont une couleur maximale paire. donc pour état $q \in F$, q a une couleur paire maximale. et se répète souvent. Ce qui correspond à l'acceptation d'un mot dans un automate à partie.

(b). On veut montrer que pour chaque automate à partie, on peut construire un automate de Büchi équivalent dont la taille est polynomiale en la taille de l'automate de départ.

Pour cela, l'idée est de prendre l'automate à partie et de construire un automate de Büchi en fonction de cet automate qui vérifie que la couleur $\max(X(\text{Inf}(p))) = 2i$. Avec les états colorés avec des entiers pairs, on y associe des nouveaux sommets qui sont reliés à sommets pairs grâce aux transitions qui existaient dans l'automate à partie.

On montre que tout mot accepté dans l'automate à partie sera accepté dans l'automate de Büchi.

En visitant infiniment souvent l'état ayant la couleur maximum paire, on s'assure de passer infiniment souvent dans les nouveaux états ajoutés qui sont devenus des états finaux vivants, on a la condition : que l'état pair dans l'automate à partie est visité infiniment souvent car l'état associé est visité infiniment souvent.

2. Jeux de partie faible.

2.1 Transformations en jeu à parties infinies.

Soit l'anneau de départ $\mathbb{A} = (V = V_0 \cup V_1, E)$.